

Προς μια Ολοκληρωμένη Διδασκαλία των Εννοιών της Μεταβλητής στα Διάφορα Γνωσιακά Πεδία, Μέσω Προγραμματισμού

Μωυσής Δειμέζης¹, Γιώργος Γυφτοδήμος²

¹ΜΙΘΕ/ΕΚΠΑ {moissis@phs.uoa.gr}, ²ΜΙΘΕ/ΕΚΠΑ {gyftodim@phs.uoa.gr}

Περίληψη

Το παρόν αφορά μια μελέτη και έρευνα υπό εξέλιξη, όπου υποστηρίζεται η χρήση προγραμματισμού με τη γλώσσα Logo για την εξοικείωση των μαθητών με τα διάφορα ειδικότερα νοήματα όπου αναφέρεται η έννοια της μεταβλητής, τόσο στο θεωρητικό επίπεδο διαφόρων γνωσιακών πεδίων όσο και πρακτικών εφαρμογών, καθώς και για την διερεύνηση των δυνατοτήτων συνύπαρξης και συνεκμετάλλευσης αυτών των νοημάτων, σε ένα ενιαίο πλαίσιο. Είναι προφανής η αναγκαιότητα ενός σφαιρικού πλαισίου, όπως αυτού της Logo, όπου οι μαθητές θα συναντούν από νωρίς ακόμη και θα διακρίνουν τις διάφορες μορφές χρήσης του όρου «μεταβλητή», έτσι ώστε να αποφεύγονται οι διαχωριστικές τομές μεταξύ των διαφόρων πεδίων γνώσης, αλλά και τέτοιο ώστε να μη παρεμποδίζεται η αυστηρή επιστημονική προσέγγιση, όπου αυτή απαιτείται.

Λέξεις κλειδιά: Έννοια μεταβλητής, Γνωσιακά πεδία, Μοντέλα υπολογισμού, Μεταμαθηματική, Κατηγορηματική Λογική, Λογική Boole, Μηχανή Turing, λ-λογισμός, Γλώσσα Logo, Μαθηματικές μεταβλητές, Αλγοριθμικές είτε Προγραμματιστικές μεταβλητές, Μεταβλητές εισόδου, Ανεξάρτητες μεταβλητές, Εξαρτημένη μεταβλητή, Αναδρομικές διαδικασίες.

1. Στόχοι

Ένα από τα κεντρικά ζητήματα που αντιμετωπίζει ο μαθητής από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Γυμνασίου αλλά και νωρίτερα από εμπειρικές γνώσεις, είναι η έννοια της μεταβλητής (Εφόπουλος κ.α., 2005), (Τζιμογιάννης, 2008). Μια πηγή δυσκολιών στην κατανόησή της είναι ότι τη συναντά σε διάφορα μαθήματα ή τόπους, με διάφορα νοήματα που δεν συσχετίζονται ή ακόμα και αλληλοσυγκρούονται. Συνήθως καλύπτει τις εμφανιζόμενες διαφορές διαχωρίζοντας και απομονώνοντας τα πεδία γνώσης, συνειδητά ή όχι: «*Τώρα μιλάμε για μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις, τώρα σε συναρτήσεις, τώρα για μεταβολές φυσικών μεγεθών, τώρα για μεταβλητές σε αλγοριθμικές διαδικασίες, τώρα σε σκέψεις της κοινής λογικής...*» Για να φανεί συνεπής απέναντι σε κάθε σχολικό μάθημα, ο μαθητής συχνά αποφεύγει την ανάμειξη γνώσεων από διαφορετικά πεδία και αυτοπεριορίζεται σε συλλογισμούς που ακολουθούν

αυτό που αντιλαμβάνεται ως «δεδομένους κανόνες». Συνηγορούν σ' αυτή την αντιμετώπιση και τα κενά θεμελίων της γνώσης που συνήθως ενυπάρχουν στα σχολικά βιβλία των τάξεων του Γυμνασίου για λόγους απλότητας και οικονομίας. Έτσι, βασίζεται αυστηρά στη σημειολογία του βιβλίου χωρίς να είναι ακόμα σε θέση να διακρίνει την τυποποίηση της γνώσης που απορρέει από αξιώματα και θεμελιακές έννοιες, από αυτή που αποσκοπεί διδακτικά σε απλούστευση της έκφρασης για διευκόλυνση της μάθησης.

Ακολουθεί, ως παράδειγμα, μια συζήτηση με («πολύ καλό») μαθητή Γυμνασίου:

Μαθ: Παιδεύτηκα ώρες, αλλά δεν μπορώ να παραγοντοποιήσω αυτή την παράσταση.

Καθ: Μα δεν βλέπεις πως είναι τριώνυμο ως προς α;

Μαθ: Το βλέπω, αλλά είναι α.

Καθ: Και λοιπόν;

Μαθ: Το τριώνυμο αναφέρεται σε μεταβλητή. Δεν είναι μεταβλητή το α.

Καθ: Γιατί δεν μπορείς να το θεωρήσεις μεταβλητή;

Μαθ: (γυρίζει πίσω σελίδες του βιβλίου και διαβάζει:) «Παριστάνουμε σταθερές με τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου, παραμέτρους με τα μεσαία και μεταβλητές με τα τελευταία».

Τέτοιες θεωρήσεις «κανόνων» από τον μαθητή, συνήθως διορθώνονται με την εξέλιξη του μαθήματος αλλά με παράλληλο χάσιμο χρόνου. Ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου θα μπορούσε να γίνει αξιοποίηση γνώσεων από ένα γνωσιακό πεδίο σε άλλο, η έλλειψη ενός κεντρικού πλαισίου αναφοράς όπου θα διακρίνει και θα συσχετίζει τις περιπτώσεις μπορεί να αφήσει σημαντικά κενά σε ικανότητες αξιοποίησης των γνώσεων του.

Σκοπός της μεθόδευσης που προτείνεται στο παρόν είναι να οργανωθεί ένα ενοποιημένο πλαίσιο διδασκαλίας και μελέτης, ικανό να δώσει στους μαθητές να αντιληφθούν με σαφή και εύληπτο τρόπο την έννοια της μεταβλητής στις διάφορες μορφές της κατά πεδίο γνώσης, έτσι ώστε μέσα από αυτό να κτιστεί μια νοηματική γέφυρα ανάμεσα στο «είναι» των μαθηματικών και λογικών εννοιών και στο «γίγνεσθαι» των πληροφορικών δράσεων και αντίστροφα όπου αυτό είναι δυνατό. Απώτερος σκοπός είναι να οδηγηθεί ο μαθητής στη σαφή διάκριση της μαθηματικής σκέψης έναντι της αλγοριθμικής (Knuth, 1985) και από αυτή σε ικανότητες ενοποιημένης σκέψης.

2. Θεωρητικοί λόγοι για μια ενιαία προσέγγιση και δυνατότητες της *logo* για το σκοπό αυτό

Η συνθετότητα του ζητήματος της διδασκαλίας της μεταβλητής στους μαθητές ξεκινά από το ότι δεν διαθέτουμε ένα ενιαίο θεωρητικό πλαίσιο πάνω στο οποίο να μπορούν να βασιστούν όλες οι χρήσεις μεταβλητών:

- Η έννοια της μεταβλητής στα Μαθηματικά και ιδίως στην Ανάλυση βασίζεται στο λογικό μοντέλο της Μεταμαθηματικής (Kleene, 1962) και έχει αφαιρετικό νόημα, που εν μέρει μπορεί να παρασταθεί προγραμματιστικά. Το ζήτημα αυτό έχει υποστηριχθεί πολύπλευρα και με μεγάλο εύρος ειδικών περιπτώσεων και εφαρμογών (Hoyles & Noss 1992).

- Στην Κατηγορηματική Λογική η έννοια της μεταβλητής είναι συνυφασμένη με τη χρήση ποσοδεικτών ($\exists x$, $\forall x$) (Mendelson, 2009), που προγραμματιστικά αποδίδονται αναγκαστικά με διαδικαστικό τρόπο ως «δράσεις» που εκτελούνται για να διαπιστώσουν ή να εντοπίσουν το αληθές σχέσεων ή καταστάσεων.

- Στη Λογική Boole γίνεται χρήση λογικών μεταβλητών στις συναρτήσεις Boole, κατ'αντιστοιχία με τη χρήση στις μαθηματικές συναρτήσεις, αλλά εδώ οι πράξεις μεταξύ των μεταβλητών είναι τα λογικά συνδετικά and, or, not και πεδίο ορισμού τους καθώς και τιμών της συνάρτησης, το σύνολο {true, false}.

- Τα μοντέλα υπολογισμού όπως η Μηχανή Turing ή ο λ -λογισμός (Church, 1941) προσδιορίζουν ισodύναμα μεταξύ τους την έννοια και τη χρήση της αλγοριθμικής μεταβλητής, η οποία όμως δεν αντιστοιχεί άμεσα στο μαθηματικό νόημα της μεταβλητής. Προγραμματιστικά, η νοηματική συσχέτιση μαθηματικής και αλγοριθμικής μεταβλητής είναι πρωταρχικής σημασίας για το μαθητή, διότι στο ίδιο πρόγραμμα είναι δυνατό να χρησιμοποιούνται κάποιες μεταβλητές με μαθηματικό νόημα, όπως για την έκφραση μιας μαθηματικής έννοιας μέσα στον αλγόριθμο και άλλες με λειτουργικά βοηθητικό, όπως για την περιγραφή διαδικαστικών βημάτων που οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Το ζήτημα γίνεται συνθετότερο, λόγω του ότι η ίδια μεταβλητή μπορεί να παίζει διπλό ρόλο, όπως στην αλγοριθμική έκφραση, που περιλαμβάνει βήμα " $X=X+1$ " (ρόλος μεταβλητής καθαρά διαδικαστικός) και ακολουθείται από το βήμα " $Y=2*X+1$ " (αλγοριθμικό μεν βήμα, αλλά οι μεταβλητές εκφράζουν μαθηματική σχέση).

Βέβαια, το ζήτημα του θεωρητικά αυτόνομου προσδιορισμού της έννοιας «μεταβλητή» στη λογική, στα μαθηματικά αξιωματικά συστήματα και στην πληροφορική, δεν αφορά άμεσα τη γνώση του μαθητή, ούτε αργότερα του σπουδαστή πλην των ειδι-

κών. Λόγω όμως της χρήσης υπολογιστών «σχεδόν παντού», σε μαθήματα ή στην καθημερινή ζωή, δημιουργείται μια ιδιόμορφη κατάσταση: Ο μαθητής συναντά από νωρίς σημαντικά υπολογιστικά εργαλεία μαθηματικής γνώσης, αλλά και εκ των πραγμάτων ζει σε μια εποχή όπου ο υπολογιστής χρησιμοποιείται ως εργαλείο, σχεδόν στο καθετί, έστω και κατά τόπους. Δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τις εμπειρικές γνώσεις που αποκτά από διάφορες χρήσεις υπολογιστή, διότι μπορούν να τον οδηγήσουν, ακόμα και σε ακραία αντικρουόμενες αντιλήψεις, ως προς το που και το πώς συσχετίζονται τα διάφορα γνωσιακά πεδία και οι τρόποι χρήσης των μεταβλητών. Κατά συνέπεια, ανεξαρτητοποίηση των αναφορών του όρου «μεταβλητή» κατά γνωσιακό πεδίο δεν είναι σκόπιμη, ούτε είναι εφικτή η θεώρηση ενός υπέρτερου γνωσιακού πεδίου ως χώρου που θα υπερκάλυπτε τα πάντα.

Στο ζήτημα αυτό έρχεται ο προγραμματισμός, ως σημαντικό εργαλείο υποστήριξης της διδασκαλίας της μεταβλητής, φέρνοντας τον μαθητή σε συγκριτική μελέτη για κάθε πεδίο χρήσης μεταβλητών. Ειδικότερα με τη χρήση της γλώσσας Logo που έχει το συγκριτικό πλεονέκτημα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις μαθητικές τάξεις, αρχίζοντας από τις μικρές γυμνασιακές τάξεις ώστε να προλάβουμε παρανοήσεις και διαχωριστικές τομές στην αναπτυσσόμενη γνώση του μαθητή. Η θεωρητική υπολογιστική ανεπάρκεια για την έκφραση όλων των μαθηματικών εννοιών δεν είναι δυνατό να παρακαμφθεί, αλλά μπορεί να αντιμετωπιστεί από τον διδάσκοντα με κατάλληλες εξηγήσεις όπου και όταν απαιτηθεί.

Από υπολογιστική άποψη, η καταλληλότητα της Logo έγκειται στο ότι υποστηρίζει όλες τις συνήθεις μορφές και χρήσεις μεταβλητών που συναντάμε σε πολύ πιο σύνθετες γλώσσες προγραμματισμού (Harvey & Wright, 1999): Μεταβλητή εισόδου, δομημένο προγραμματισμό μέσω μεταβίβασης τιμών μεταβλητών διαδικασίας προς μεταβλητές υποδιαδικασιών, διάκριση και διαχείριση οντότητας - όνομα μεταβλητής από την οντότητα - τιμή αυτής της μεταβλητής, τιμή εξόδου διαδικασίας όπου το όνομά της χρησιμοποιείται ως εξαρτημένη μεταβλητή, κλήση μεταβλητής διαδικασίας, μεταβλητή με σύνθετο περιεχόμενο - τιμή (λίστα), μεταβλητή που έμμεσα δέχεται ως τιμή μια διαδικασία (run...), σφαιρική μεταβλητή (make...), σύνδεση με συνθετότερες δομές όπως η λίστα ιδιοτήτων μεταβλητής κ.ά.

Παρά τους υπολογιστικούς περιορισμούς της, η γλώσσα Logo έχει το πλεονέκτημα της εκφραστικής αμεσότητας στην αναπαράσταση των απαραίτητων για την προτεινόμενη χρήση νοημάτων. Δεν απαιτεί από τον μαθητή να προβαίνει νοητικά σε κάποιο μετασχηματισμό των εκφράσεων προς μια τυπική τεχνική φόρμα όπως άλλες γλώσσες. Επιπλέον αυτό που χρειαζόμαστε εδώ, δεν είναι η κατασκευή και εκτέλεση

ενός τελικού προγράμματος αλλά η έκφραση από τον ίδιο το μαθητή σε ένα ενιαίο περιβάλλον εργασίας κατ' αρχάς, απλών λογικο-μαθηματικών σχέσεων και συσχετισμών και στη συνέχεια σταδιακά συνθετότερων. Το έργο του νοείται σε μορφή ενός δυναμικά εξελισσόμενου προγράμματος όπου θα διαμορφώνει ο ίδιος τα παραδείγματα, αρχικά κατ' αναλογία προς τα διδασκόμενα και μετέπειτα στο πλαίσιο εργασίας που αναλαμβάνει, σε επεκτάσεις κατά την κρίση του με επαναχρησιμοποίηση ή αναδιαμόρφωση των διαδικασιών, ενδεχομένως μέχρις αναδόμησης του προγράμματος, ως «κτίσιμο μιας νέας οικοδομής αξιοποιώντας τα υλικά κατεδάφισης» (Papert, 1980). Οι υπολογιστικοί περιορισμοί της Logo υπερβαίνονται σχετικά εύκολα αν σε μεταγενέστερα στάδια χρησιμοποιηθεί ως «το επόμενο σκαλοπάτι προγραμματισμού» η γλώσσα Scheme (Harvey & Wright, 1999) η οποία όμως προς το παρόν δεν εμπίπτει στη σχολική διδακτική ύλη της χώρας μας.

Επίσης στη Logo είναι εφικτή η οργάνωση διαδικασιών - εργαλείων από έναν ειδικότερο στον προγραμματισμό (διδάσκοντα σε ρόλο ανάλογο του συγγραφέα ενός εκπαιδευτικού συγγράμματος), που θα μπορούν να αξιοποιούνται στο μάθημα,

- είτε μορφής «μαύρο κουτί», ως διαδικασία ή πακέτο διαδικασιών με σκοπό ο μαθητής να μπορεί να αξιοποιεί χρησιμοποιώντας μόνο τις μεταβλητές εισόδου και τις εξόδους, δηλαδή γνωρίζοντας μόνο τί κάνει και αδιαφορώντας για το πώς το κάνει,

- είτε μορφής «γκρίζο κουτί», που ο μαθητής θα αξιοποιεί χρησιμοποιώντας όχι μόνο τις μεταβλητές εισόδου και τις εξόδους των διαδικασιών του, αλλά ενδεχομένως και επεμβαίνοντας σε κάποια συγκεκριμένα βασικά μέρη του,

- είτε μορφής «λευκό κουτί», που ο μαθητής θα αξιοποιεί είτε αυτούσιο είτε επεμβαίνοντας στο περιεχόμενό του, βλέποντάς το ως οδηγό - καλούπι για διαμόρφωση μιας δικής του ιδέας.

3. Αντιστοιχίες νοημάτων που εκφράζει η μεταβλητή, από το πρότυπο γνωσιακό πεδίο στο προγραμματιστικό

Κατά πεδίο γνώσης, διακρίνουμε τα εξής είδη μεταβλητών και τρόπους αναπαράστασής τους:

A) Γίνεται χρήση μεταβλητών στη μελέτη των συναρτήσεων, όπου διακρίνουμε ανεξάρτητη(-ες) από εξαρτημένη μεταβλητή. Η συνάρτηση παρίσταται προγραμματιστικά άμεσα ως διαδικασία, με μεταβλητή(ές) εισόδου την ή τις ανεξάρτητες μεταβλητές και έξοδο (OP) την αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης, η οποία μπορεί είτε να ονο-

ματιστεί επεξηγηματικά είτε να συμπίπτει με το όνομα της διαδικασίας. Το πεδίο ορισμού μεταβλητής παρίσταται διαδικαστικά με λογικό έλεγχο (IF...), που θα ελέγχει αν η επιλεγμένη κάθε φορά τιμή εισόδου είναι κατάλληλη ή όχι (Cuoco, 1990). Ουσιαστικό είναι ότι η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί μεν να ορίζεται αλγοριθμικά σε αφαιρετικό επίπεδο, αλλά ο όποιος υπολογισμός (εκτέλεση) περιορίζεται αναγκαστικά στο επίπεδο συγκεκριμένων τιμών εισόδου και πρέπει να διευκρινίζεται ρητά κατά το μάθημα.

Οι μαθηματικές εκφράσεις (πχ. $2xy+y^2$) μπορούν πάντα να παρασταθούν ως συναρτήσεις ($f(x,y) = 2xy+y^2$) και αυτές άμεσα ως διαδικασίες:

```
to f :x :y op 2 * x * y + y * y end
```

Οι παράμετροι συνάρτησης μπορούν να παριστάνονται ως μεταβλητές εισόδου που εννοείται ότι θα παίρνουν μεν τιμή κατά την εκτέλεση, όπως και οι «κανονικές» μεταβλητές, αλλά θα κρατούνται σταθεροποιημένες κατά ομάδες κλήσεων εκτέλεσης.

Οι εξισώσεις μπορούν να παρασταθούν ως λογικές εκφράσεις που για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών τους παίρνουν τιμή true ή false, με συνηθέστερη χρήση ως λογικός όρος - κριτήριο σε επιλογή (πχ. "if $x+1=2$ then..."). Για την προγραμματιστική επίλυση εξίσωσης μπορούμε είτε να κινηθούμε ευρετικά, όπως με επαναληπτική σάρωση ενός συνόλου τιμών όπου γνωρίζουμε ότι (ή ερευνούμε αν-) περιλαμβάνει την (ή μια) λύση, ή να καταγράψουμε ως διαδικασία ένα γνωστό αλγόριθμο επίλυσης.

Β) Στη Φυσική και στη Χημεία χρησιμοποιούνται μεταβλητές ως μαθηματικές εφαρμογές, με το επιπρόσθετο νόημα του αντιπρόσωπου ενός φυσικού μεγέθους και συνοδεύονται από την αντίστοιχη μονάδα. Στη Logo, που δεν ορίζονται τύποι από τον χρήστη, μπορούμε απλά να δηλώνουμε περιγραφικά τη φυσική μονάδα ως κατάληξη στο όνομα της μεταβλητής για ευκρίνεια.

Γ) Οι λογικές συναρτήσεις Boole εκφράζονται διαδικαστικά ως συνήθεις μαθηματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάθε μεταβλητής το {true, false}. Το πλεονέκτημα του προγραμματισμού είναι ότι κάθε διαδικασία που δίνει έξοδο μια τιμή στο σύνολο {true, false}, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως λογική συνάρτηση ανεξάρτητα από το αν στο σώμα της ορίζονται αποκλειστικά λογικές συνθέσεις "and", "or", "not" ή γίνεται χρήση και διαδικαστικών. Αυτό είναι ένα πεδίο που συσχετίζει λογικά και διαδικαστικά νοήματα και διευρύνει σε μεγάλο βαθμό τις δυνατότητες ανάπτυξης εφαρμογών με χρήση λογικής.

Δ) Για την αναπαράσταση κατηγορηματικών μεταβλητών του τύπου «για κάθε x από ένα σύνολο S ισχύει η ιδιότητα P » και αντίστοιχα «υπάρχει τουλάχιστον ένα $x...$ » μπορούμε να παραστήσουμε το S (βέβαια μόνον αν είναι πεπερασμένο και επαρκώς μικρό) με μια λίστα και τις έννοιες «για κάθε» (αντίστοιχα «υπάρχει τουλάχιστον ένα») ως αναδρομικές διαδικασίες που «σαρώνουν» τη λίστα, για να διαπιστωθεί το αληθές ή ψευδές του τρέχοντος όρου ως προς την αναφερόμενη ιδιότητα, για κάθε όρο της λίστας (αντίστοιχα, για τουλάχιστον ένα όρο). Με την σταδιακή εξοικείωση των μαθητών με την προγραμματιστική αναπαράσταση λογικών σχέσεων μπορεί να λυθεί μια αρκετά συνήθης σύγχυση των μαθητών (και συχνά και σπουδαστών) που είναι η θεώρηση ότι η αλγοριθμική επιλογή ("if a then b") είναι αντίστοιχη με τη λογική σχέση Boole $a \rightarrow b$ («αν a τότε b »). Πρόκειται για βασικό σφάλμα που εμποδίζει την ανάπτυξη ολοκληρωμένων συλλογισμών που θα συναξιοποιούν λογικά και λειτουργικά (αλγοριθμικά) στοιχεία.

Ε) Στον προγραμματισμό διακρίνονται διάφορα είδη μεταβλητών, που η κατανόησή τους από τον μαθητή είναι ένα ιδιαίτερο ζήτημα (Τζιμογιάννης, 2008). Σε μια διαδικασία που παριστά μια μαθηματική σχέση είναι δυνατό να χρησιμοποιούνται και μεταβλητές, που ενώ έχουν καθαρά λειτουργικό νόημα για τον αλγόριθμο είναι αναγκαίες ή έστω βοηθητικές για την προγραμματιστική έκφραση της πρότυπης σχέσης και ακόμα περισσότερο για την επίτευξη του τελικού σκοπού που συχνά είναι «λειτουργικός». Διαφοροποιούμε εύκολα τέτοιες μεταβλητές στη διαδικασία με χρήση κατάλληλων ονομάτων και εφιστούμε την προσοχή των μαθητών στον «λειτουργικό» ρόλο τους. Η διάκριση είναι αναγκαία διότι μια διαδικασία Δ μπορεί να ορίζει κάποια μαθηματική σχέση M και ταυτόχρονα να επιτελεί κάποια λειτουργία Λ αλλά εν γένει οι Λ και M δεν είναι στο ίδιο επίπεδο γενικότητας και μπορεί εύκολα να προκληθεί «παράλογη συμπεριφορά» σε μια μεταγενέστερη ευρύτερη σύνθεση.

Η περίπτωση μεταβλητών που παίζουν διάφορους ρόλους στην ίδια διαδικασία είναι συνήθης στον προγραμματισμό. Σε επαναληπτικές ή αναδρομικές διαδικασίες το νόημα κάποιας μεταβλητής μπορεί να καθορίζεται είτε μαθηματικά (πχ. «ακολουθία Fibonacci») είτε λειτουργικά από τον επιδιωκόμενο σκοπό (πχ. «Πύργοι του Ανόι»), αλλά ταυτόχρονα μπορεί να παίζει και βοηθητικό υπολογιστικό ρόλο όπως στον προσδιορισμό του επόμενου «κύκλου» της επανάληψης ή αναδρομής. Η διάκριση αυτών των ρόλων είναι θεμελιακή για την κατανόηση πώς ο αλγόριθμος επιλύει το μελετώμενο πρόβλημα και κυρίως αν το επιλύει κατά τρόπο αποδεκτό από το αντίστοιχο πεδίο γνώσης. Πχ. ο γνωστός αναδρομικός αλγόριθμος υπολογισμού του νιοστού όρου Fibonacci αντιστοιχεί επακριβώς στον μαθηματικό τύπο $a_{v+1} = a_v + a_{v-1}$, ενώ ο αντίστοιχος επαναληπτικός είναι απλά μια διαδικασία που δίνει μεν τελικά τη ζη-

τούμενη απάντηση, αλλά δεν αποτελεί αποδεκτή μαθηματική επίλυση λόγω των βημάτων που κάνουν μετάθεση των δεικτών. Ενώ αντίθετα ο δεύτερος αλγόριθμος είναι αποδεκτός στην Πληροφορική και ο πρώτος όχι, λόγω αποτελεσματικότητας (ο δεύτερος είναι γραμμικής τάξης έναντι της εκθετικής του πρώτου).

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται και οι μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν μεγέθη που παριστάνονται γραφικά στην οθόνη, διότι ως αναπαραστάσεις διευκολύνουν τον μαθητή στην κατανόηση της απόλυτης θεωρητικής έννοιας που «εννοείται ότι φέρουν», αλλά η γραφική αναπαράσταση είναι εν γένει «χονδροειδώς προσεγγιστική», ανεπαρκής για να δώσει κάποια θεωρητικά ισχυρή πληροφορία.

ΣΤ) Σε μαθηματικές παραστάσεις και ανάλογα με το πλαίσιο αναφοράς που καθορίζεται ή εννοείται από το επιλυόμενο πρόβλημα, μια μεταβλητή μπορεί να έχει νόημα αφαίρεσης ή γενίκευσης απέναντι στις διάφορες δυνατές ειδικές τιμές που μπορεί να λάβει από ένα σύνολο-πεδίο τιμών, αλλά επίσης και νόημα σφαιρικής αντιπροσώπευσης των στοιχείων ενός συνόλου σε καθένα των οποίων μπορεί να εξειδικευτεί.

4. Διδακτική μεθοδολογία

Η πολυπλοκότητα του ζητήματος μαζί με το γεγονός ότι στοχεύει διδακτικά σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, απαιτεί εφαρμογή μεθοδολογίας αλλά και επιβεβαίωση της αποτελεσματικότητάς της, που για την παρούσα εργασία αποτελεί επόμενο στάδιο μελέτης (Milne & Rowe, 2002; Kynigos, 1993). Εδώ δίνουμε μια περιγραφή των βασικών σταδίων της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Καθορίζονται τα πεδία μελέτης και τα είδη μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στο κάθε πεδίο. Οι μαθητές παρακολουθούν αρχικά μια σειρά από απλές διαδικασίες όπου τους δίνονται κατάλληλες εξηγήσεις ως προς το ρόλο των μεταβλητών, πρώτα στον τυπικό (ή νοηματικό, ανάλογα με το γνωσιακό πεδίο) προσδιορισμό των εννοιών. Ακολούθως εισάγονται στο πώς παρίστανται προγραμματιστικά. Μετά οδηγούνται σε παρατήρηση και μελέτη εκτελέσεών της και τέλος σε συσχέτιση των πρότυπων θεωρητικών εννοιών με τη λαμβανόμενη εικόνα στην οθόνη (πχ. «διχοτόμος γωνίας x», «κανονικό πολύγωνο n πλευρών μήκους μ »). Αναλαμβάνουν στη συνέχεια να αξιοποιήσουν μια ή περισσότερες από αυτές τις διαδικασίες για να συνθέσουν μια ειδικότερη ή συνθετότερη εφαρμογή που σε πρώτα στάδια προτείνει ο διδάσκων και αργότερα της επιλογής τους (πχ. αντίστοιχα «διχοτόμοι ισόπλευρου τριγώνου πλευράς λ », «ομόκεντρα όμοια πολύγωνα που απέχουν κατά a , πλήθους n »). Σε κάθε στάδιο θα προσδιορίσουν τις θεωρητικές μεταβλητές και το είδος τους και πώς αυτές

συσχετίζονται με τις μεταβλητές των χρησιμοποιούμενων διαδικασιών, άμεσα ή έμμεσα.

Ουσιαστικός σκοπός της μελέτης τους είναι να χαρακτηρίσουν τις αναφερόμενες στο πρόγραμμα μεταβλητές, κατά το ρόλο τους ανά πεδίο γνώσης και τη σημασία τους για το αποτέλεσμα (πχ. αν πρόκειται για παραμέτρους, αν εκφράζουν γενικότητα, αν χρησιμοποιούνται για να διευκολύνουν τη νοηματική ή την αλγοριθμική έκφραση).

Η διδασκαλία βασίζεται σε συνεργατική μελέτη ανά μικρές ομάδες μαθητών (ανάλογα με τις διαθέσιμες ώρες, το χώρο και τα μέσα εργασίας), όπου κάθε ομάδα καλείται να συντάξει έκθεση με προσδιορισμό των χαρακτηρισμών των μεταβλητών που χρησιμοποιήσε και με ανάλυση του ρόλου που παίζουν (αν παίζουν), αφενός στο πρότυπο γνωσιακό πεδίο και αφετέρου στο προγραμματιστικό (Kynigos, Gyftodimos & Georgiadis, 1993).

Ένα παράδειγμα επίλυσης προβλήματος συσχετισμού γνωσιακών πεδίων με αναφορά μεταβλητών (Μαθηματικά, Φυσική, Αλγόριθμοι): Ο μαθητής καλείται εφαρμόζοντας γεωμετρικές γνώσεις, να συντάξει διαδικασίες που σχεδιάζουν γωνία, διχοτόμο γωνίας, ισόπλευρο τρίγωνο, τις διχοτόμους τριγώνου, τον εγγεγραμμένο και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ισοπλεύρου τριγώνου και να θέσει το σύνθετο σχήμα σε περιστροφική κίνηση περί το κέντρο βάρους του και ακολούθως σε κύλιση (Δεϊμέζης, 2016). Ο μαθητής οφείλει να προσδιορίσει το γνωσιακό πεδίο αναφοράς κάθε σχέσης που προγραμματίζεται και μέσα σ' αυτή κάθε μεταβλητής, καθώς και να περιγράψει το ρόλο που παίζει αφενός σ' αυτό και αφετέρου στο πρόγραμμα. Επίσης να εμφανίζεται στην οθόνη και ο «χρόνος του πειράματος», ο οποίος να «διαστέλλεται κατά την κρίση του παρατηρητή» μέσω κατάλληλης παραμέτρου της συνολικής διαδικασίας.

Βιβλιογραφία

- Church A. (1941). *The Theory of Lambda Conversion*. Princeton University Press.
- Cuoco I.A. (1990) *Investigations in Algebra. An Approach to Using Logo*. MIT Press.
- Harvey B. (1997). *Computer Science Logo Style*. MA: MIT Press.
- Harvey B. & Wright M. (1999). *Simple Scheme*. MA: MIT Press.
- Hoyles C. & Noss R. (1992). *Learning Mathematics and Logo*. Exploring with Logo Series, Cambridge, MA: MIT Press.
- Kleene S.C. (1962). *Introducion to Metamathematics*. North-Holland.

- Knuth D.E. (1985). *Algorithmic Thinking and Mathematical Thinking*. Amermathmont, The American Mathematical Monthly, 92(3), 170–181.
- Kynigos C. (1993). *Learning Logo and Mathematics*. In: *Research on e-Learning and ICT in Education* (Ed A.Jimoyannis), pp. 97–126. Cambridge MA: MIT press.
- Kynigos C., Gyftodimos G. & Georgiadis P. (1993). *Empowering a Society of Future Users of Information Technology*. In: *European Journal of Information Systems* 4 , pages 139-148.
- Mendelson E. (2009). *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press.
- Milne I. & Rowe G. (2002). *Difficulties in Learning and Teaching Programming - Views of Students and Tutors*. In: *Education and Information Technologies* 7:1, 55–66, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Papert S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- Δειμής Μ. (2016). *Προγραμματισμός Υπολογιστών. Θεωρία & Λυμένες Ασκήσεις Προγραμματισμού σε MSW LOGO με σχόλια*, Αθήνα: Δειμής Μ.
- Ευθυμίου Γ. (2013). *Διερεύνηση της σύνδεσης γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων της παραβολής με χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας*. Διπλ. εργασία (ΔΠΜΣ "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών")
- Εφόπουλος Β., Ευαγγελίδης Γ., Δαγδιλέλης Β. & Κλεφτοδήμος Α. (2005). *Οι Δυσκολίες των Αρχάριων Προγραμματιστών*. 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Διδακτική της Πληροφορικής». Α.Τζιμογιάννης (επιμ.), Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Κόρινθος.
- Τζιμογιάννης Α. (2008). *Η διδασκαλία του Προγραμματισμού και της αλγοριθμικής επίλυσης προβλημάτων στο Ενιαίο Λύκειο*. "Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών Πληροφορικής", EAITY.
- Τζιμογιάννης Α., Πολίτης Π. & Κόμης Β. (2005). *Μελέτη των αναπαραστάσεων τελειόφοιτων μαθητών Ενιαίου Λυκείου για την έννοια της μεταβλητής*. Στο Α. Τζιμογιάννης (επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου "Διδακτική της Πληροφορικής"*, 61-70, Κόρινθος.

Abstract

This paper is about a study and research in progress, in which the use of Logo programming language is supported to help familiarize students with the various particular concepts where the meaning of *the variable* is mentioned, both on the theoretical level of different cognitive fields and the level of practical applications as well. Moreover, the possibilities of coexistence and pooling of these meanings in a unified framework are investigated. The need for a comprehensive framework, as the one of Logo, where students will meet and distinguish the different uses of the term "*variable*" even at an early stage, is essential for both avoiding "mental

gaps" between the various knowledge fields, and not hindering the strict scientific approach where required, as well.

Keywords: Variable concept, Cognitive fields, Calculation models, Metamathematics, Predicate Logic, Boolean Logic, Turing Machine, λ -calculus, Logo language, Mathematical variables, Algorithmic or Programming variables, Input variables, Independent variables, Dependent variable, Recursive procedures.